Kap. VII: Die Theorien von ACKERMANN, SCOTT und QUINE

§1 Die ACKERMANNsche Mengenlehre

Literatur:

ACKERMANN , W.: Zur Axiomatik der Mengenlehre. Math. Ann. 131 (1956), 336-345
LEVY, A.: On Ackermann´s set theory, JSL 24 (1959), 154-166
LEVY-VAUGHT: Principles of partial reflection in the set theories of Zermelo and Ackermann, PacJMath 11 (1961), 1045-1062
REINHARDT, W.N.: Ackermann´s set theory equals ZF, AnnMathLogic 2(1970), 189-249
REINHARDT, W.N.: Set existence principles of Shoenfield, Ackermann and Powell, FundMath 84 (1974), 5-34

Sehr gute Übersicht und Einführung in verschiedene Theorien der Mengenlehre:
FRAENKEL-BAR HILLEL-LEVY: Foundations of Set Theory, NHPC 1973

1.1 Sprache von A: *Objekte* der ACKERMANNschen Mengenlehre sind Mengen, Klassen von Mengen und Klassen von Klassen von . . . ; zur Bezeichnung wählen wir Großbuchstaben A, B, . . , X, Y, Z, . . .
V ist eine *Konstante*, die die Klasse aller Mengen bezeichnet, ansonsten bilden wir *Formeln* wie in ZF mittels $=, \in$, und den logischen Symbolen $\forall, \exists, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ und $\leftrightarrow$.
Elemente von V (also *Mengen*) werden auch mit kleinen Buchstaben bezeichnet;
Formeln ohne die Konstante V heißen $\in$ - *Formeln*.

1.2 Axiome von A:

A1 **Extensionalitätsaxiom**: $\forall X\, (X \in A \leftrightarrow X \in B) \rightarrow A = B$

A2 **Komprehensionsschema** $\exists X\, \forall Y\, (Y \in X \leftrightarrow Y \in V \wedge \varphi(Y, \ldots))$,
wobei φ eine beliebige Formel ist,.
Somit existiert zu jeder Formel φ die Klasse der *Mengen* $\{x \mid \varphi(x, \ldots)\}$.

A3 **Strans** strans(V), d.h. $B \in V \wedge (A \in B) \vee (A \subseteq B) \rightarrow A \in V$

A4 **Mengenkomprehension** $\forall X\, (\varphi(X,a_1,a_2, \ldots) \rightarrow X \in V) \rightarrow$
$\exists y \in V\, \forall X\, (X \in y \leftrightarrow \varphi(X,a_1,a_2, \ldots))$ für $\in$ - Formeln φ ,
d.h. gilt eine Eigenschaft φ , die sich nicht auf V bezieht (aber möglicherweise auf einzelne Mengen $a_1, a_2, \ldots$), nur für Mengen, so bildet die Gesamtheit aller *Mengen* mit der Eigenschaft φ selbst eine Menge.

Die Theorie A* ist A mit zusätzlichem

A5 **Fundierungsaxiom** (Fund) $a \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in a \; x \cap a = \emptyset$,

A** hat zusätzlich das **Fundierungsschema** als Axiom.

1.3 Man kann leicht zeigen, daß die Axiome Paar, Sum, Pot, Unendlichkeit in A für Mengen gelten; so wählt man etwa zum Beweis des Paarmengenaxioms in A4 die Formel

$$\varphi(X,a_1,a_2, \ldots) \leftrightarrow X = a_1 \vee X = a_2 ,$$

zum Beweis des Potenzmengenaxioms in A4 die Formel

$\varphi(X,a, \ldots) \leftrightarrow X \subseteq a$, nach A3 gilt dann

$\forall X \, (\varphi(X,a, \ldots) \rightarrow X \in V)$, also nach A4 ist P(a) eine Menge.

Schwieriger ist nur der Beweis des Ersetzungsaxioms für Mengen, tatsächlich gilt nach LEVY/REINHARDT:

$A^* \vdash \phi \Leftrightarrow ZF \vdash \phi$ für jede ZF-Formel ϕ (geschrieben also mit Kleinbuchstaben und sich in A* also auch nur auf Mengen beziehend),
d.h. in A* sind über Mengen dieselben Eigenschaften wir in ZF beweisbar.

1.4 Aus dem Schema A4 folgt die *Unbeschreibbarkeit* von V durch $\in$-Formeln:

- es gibt *keine* $\in$-Formel φ, so daß
  $\forall X \, (X \in V \leftrightarrow \varphi(X,a_1,a_2, \ldots))$ für bestimmte $a_1 , a_2 \in V$, insbesondere

- $\forall X \in V \; \varphi(X,a_1,a_2, \ldots) \rightarrow \exists X \notin V \; \varphi(X,a_1,a_2, \ldots))$,
  d.h. gilt eine Eigenschaft (*ohne* V) für alle Mengen, so nicht nur für Mengen!

Mit Hilfe von A5 kann man daraus in A* dann erhalten.

1.6 *Satz* (A*)

(i) $\varphi(V,a_1,a_2, \ldots) \rightarrow \exists z \; \varphi(z,a_1,a_2, \ldots)$ Reflexion abwärts

(i i) $\varphi(V,a_1,a_2, \ldots) \rightarrow \exists z \, (V \in z \wedge \varphi(z,a_1,a_2, \ldots))$ Reflexion aufwärts

Damit gelten $\in$ – Aussagen, die für V wahr sind (z.B. $\forall X \; \exists Y \; X \in V$, $\forall X \; \exists Y \; (Y = P(X))$, etc. mittels Reflexion aufwärts auch in einer Menge z mit $V \in z$, d.h. es existieren auch {V} , P(V), P(P(V)), {V, P(V)}, etc., aber in A* bleibt offen, wie weit der Bereich der Objekte oberhalb von V (also der Klassen von Klassen von . .) noch diese Eigenschaften der Mengen besitzt. Dagegen ist die Situation in A** klarer:

1.7 *Satz* (A**)

$\exists Z\, \varphi(Z,a_1,a_2, \ldots) \rightarrow \exists Z \in V \wedge \varphi(Z,a_1,a_2, \ldots)$ für jede $\in$-Formel φ, und somit erhalten wir das Reflexionsprinzip für V:

(*) $\forall a_1,a_2, \ldots \in V\, (\varphi^V(a_1,a_2, \ldots) \leftrightarrow \varphi(a_1,a_2, \ldots))$ für jede $\in$-Formel φ.

ZA sei die Theorie (in der Sprache von **A**) mit den Axiomen von ZF + dem Schema (*).
Dann gilt:

- **ZA** $\vdash$ **A**** und
- Ist **ZF** consistent, so auch **ZA** (und damit auch **A****),

denn ein Beweis eines Widerspruches aus **ZA** benötigt nur endlich-viele Anwendungen von (*); diese sind dann jedoch nach dem Reflexionsprinzip (für ein geeignetes V_α statt V) in **ZF** beweisbar.

§2 Die SCOTTsche Mengenlehre

<u>Literatur</u>:

Scott, D.: Axiomatizing Set Theory, in: *Axiomatic Set Theory,* Proc. AMS Symposia in Pure Math. 13,2 (1971), 207-214

Potter, M.D.: *Sets. An Introduction*, Clarendon Press - Qxford Univ. Press 1990

Das SCOTTsche Axiomensystem enthält Variable (inhaltlich: für die VON-NEUMANNSCHEN STUFEN V_α); interessant ist insbesondere die Begründung durch wenige Axiome über die Stufen und die Folgerungen aus den Axiomen unter Benutzung der bekannten mengentheoretischen Antinomien.

Die *Sprache* des SCOTTschen Axiomensystems **S** ist die Sprache von **ZF** (also die Sprache des Prädikatenkalküls mit $=$ und der Elementbeziehung $\in$ als einzigem nicht-logischen Zeichen), ergänzt um Variable $S, S', S'', \ldots$ für die Stufen (als spezielle Mengen - das ursprüngliche System von SCOTT ließ auch noch Urelemente zu).

2.1 <u>Basis-Axiome</u> von **S**

	$\forall S\ \exists x\,(x = S)$	jede Stufe ist eine Menge
(Ext)	$\forall x\,(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b$	Extensionalitätsaxiom
(AusS)	$\exists y\, \forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x,\ldots))$	Aussonderungsschema
(Acc)	$a \in S \leftrightarrow \exists S' \in S\,(a \in S' \vee a \subseteq S')$	Accumulationsaxiom, bzw.

(Acc1) $S' \in S \wedge (a \in S' \vee a \subseteq S') \rightarrow a \in S$

(Acc2) $a \in S \rightarrow \exists S' \in S\,(a \in S' \vee a \subseteq S')$

Das Accumulationsaxiom (Acc), das sich auch in die 2 Axiome (Acc1) und (Acc2) aufspalten läßt, besagt, daß die Elemente einer Stufe S gerade die Elemente oder Teilmengen einer kleineren Stufe S' sind. Tatsächlich wird sich herausstellen, daß die Elementbeziehung zwischen den Stufen einer Kleiner-Beziehung (im Sinne einer Wohlordnung entspricht), zunächst ist diese Inter-pretation aus den Axiomen jedoch noch nicht ersichtlich.

2.2 *Folgerungen* aus den Basis-Axiomen

(i)	$S \notin S$	
(ii)	$S' \in S \rightarrow S' \subseteq S$	
(iii)	$\mathrm{trans}(S)$	Transitivität der Stufen
(iv)	$a \in S \leftrightarrow \exists S' \in S\ a \subseteq S'$	
(v)	$\exists S\ \varphi(S,\ldots) \rightarrow \exists S\,[\varphi(S,\ldots) \wedge \forall S' \in S\, \neg\varphi(S',\ldots)]$	Minimumsprinzip für Stufen
(vi)	$S \in S' \vee S = S' \vee S' \in S$	Vergleichbarkeit für Stufen

Beweis:

2.3 Aus 2.2 ergibt sich, daß die Gesamtheit der Stufen $\{S| S = S\}$ durch die Elementbeziehung wohlgeordnet ist (wie die Ordinalzahlen - Stufen sind auch transitiv (nach (iii), aber Elemente von Stufen sind nicht notwendig wieder Stufen!), und daß - wie im Falle der Ordinalzahlen

$$S \in S' \leftrightarrow S \subseteq S' \wedge S \neq S' \leftrightarrow S \subset S',$$

aber aus den Axiomen folgt bisher nicht die Existenz einer Stufe (zählt man $\exists S\,(S = S)$ zu den logischen Axiomen, so gibt es wenigstens eine Stufe, und diese muß nach (iv) und (v) die kleinste Stufe, und zwar $S_0 = \emptyset$ sein). Wir fügen also als weiteres Axiom hinzu

2.4 (Restr) $\forall x\, \exists S\, (x \in S)$ Restriktionsaxiom

2.5 *Folgerungen* aus den Basis-Axiomen + (Restr)

(i) $\exists x\ \varphi(x, \ldots) \rightarrow \exists x\, [\varphi(x, \ldots) \wedge \forall y \in x\, \neg\, \varphi(y, \ldots)]$ Fundierungsschema

(ii) (Paar) $\exists y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow x = a \vee x = b)$ Paarmengenaxiom

(Sum) $\exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow \exists x \in a\ z \in x)$ Summenaxiom

(Pot) $\exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \subseteq a)$ Potenzmengenaxiom

Beweis:

2.6 Von den übrigen ZF-Axiomen fehlen nun noch das Ersetzungsaxiom und das Unendlichkeitsaxiom. Diese kann man erhalten etwa durch Hinzufügen eines Reflexionsprinzips der Form

(Refl) $\exists S\, [a \in S \wedge \forall \vec{x} \in S\, (\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi^S(\vec{x}))]$

oder durch eines der folgenden Axiomenschemata:

(Coll) $\forall x\, \exists y\, \varphi(x,y, \ldots) \rightarrow \exists S\, [a \in S \wedge \forall x \in a\, \exists y \in S\ \varphi(x,y, \ldots)]$

bzw.

(Closure) $\forall x\, \exists y\, \varphi(x,y, \ldots) \rightarrow \exists S\, [a \in S \wedge \forall x \in S\, \exists y \in S\ \varphi(x,y, \ldots)]$

welche dann auch noch das Axiom (Restr) überflüssig machen. (Zu (Coll) muß man allerdings noch das Unendlichkeitsaxiom hinzunehmen.)
Umgekehrt erhält man die Axiome des SCOTTschen Axiomensystem aus den ZF-Axiomen, wenn man die Variablen S, S´,... als die VON-NEUMANNschen Stufen interpretiert.

§3 Die Mengenlehre NF von QUINE

Literatur:

Forster, T.E.: *Set Theory with a Universal Set,* Oxford Univ.Press 1992, Rev. JSL 58,2 (1993), 725ff

Quine, W.V.: New Foundations for Mathematical Logic, Am Math Monthly 44 (1937), 70-80

Rosser, J.B.: *Logic for Mathematicians*, Mc Graw-Hill 1953

Das Axiomensystem New Foundations (**NF**) von QUINE 1937 erinnert an die RUSSELLsche Typentheorie, vermeidet aber deren technische Schwerfälligkeit. Axiome sind:

(i) Extensionalität: $\forall x\, (x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b$

(ii) Komprehensionsschema:

$$\exists y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$$

wobei $\varphi(x)$ eine *geschichtete* Formel ist, in welcher y nicht vorkommt.

Dabei heisst eine mengentheoretische Formel φ *geschichtet (stratified)* gdw die Variablen in φ so mit Typenindices versehen werden können, dass in jeder Teilformel von φ von der Form

$x \in y$ die Variable y von genau einem Typ höher als die Variable x ist bzw. in

$x = y$ die Variablen denselben Typ erhalten.

Durch diese Einschränkungen wird die RUSSELLsche Antinomie vermieden (da die Formel $x \in x$ nicht geschichtet ist); dagegen existiert die Menge aller Mengen (die Formel $x = x$ ist geschichtet!), so dass also das Aussonderungsaxiom nicht gelten kann (tatsächlich gilt es nur für geschichtete Formeln). Obwohl die Grundlage für die klassischen Antinomien fehlt, ist die Widerspruchsfreiheit von NF ein offenes Problem: Man kann auf Umwegen durchaus die Existenz von Mengen beweisen, die durch ungeschichtete Formeln definiert sind, z.B. sei

$\varphi(x)$ die Formel $x \in z \vee x = u$, welche im Falle verschiedener Variablen x, u, z geschichtet ist. Somit gilt wegen (ii):

$\exists y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow x \in z \vee x = u)$, d.h. für alle u,z existiert die Menge $z \cup \{u\}$, und aus logischen Gründen existiert dann speziell für $z = u$ auch die Menge $z \cup \{z\}$, welcher jedoch durch eine ungeschichtete Formel definiert wird!

NF besitzt einige weitere Besonderheiten: so gibt es Mengen y , die *nicht* gleichmächtig mit der Menge $\{\{x\} \mid x \in y\}$ ihrer Einermengen sind (die Abbildung $x \mapsto \{x\}$ ist durch eine ungeschichtete Formel definiert), während die Menge V aller Mengen gleichmächtig mit (sogar gleich) ihrer Potenzmenge ist und außerdem sich selbst als Element enthält: $V \in V$. Das Unendlichkeitsaxiom (in geeigneter Form) gilt in NF, da nach einem Ergebnis von SPECKER 1953 das Auswahlaxiom in NF falsch ist; dagegen sind die natürlichen Zahlen (erst recht die Ordinalzahlen) nicht wohlgeordnet (Induktion gilt nur für geschichtete Formeln!) . . . .