Teil B Alternative Axiomensysteme der Mengenlehre

Kap. VI : Reflexionsprinzipien

§1 LEVY-Hierarchie

Im folgenden beschränken wir uns - bis auf Widerruf - auf die engere ZF-Sprache, d.h. $\varphi, \psi, \ldots$ werden mengentheoretische Formeln *ohne* Klassenvariable bezeichnen.

1.1 *Definition*

$\forall x \in a\, \varphi$ steht für $\forall x(x \in a \rightarrow \varphi)$,

$\exists x \in a\, \varphi$ steht für $\exists x(x \in a \wedge \varphi)$

Wir nennen diese Quantoren *beschränkt*.

1.2 *Definition* (LEVY 1965)

Δ_0-*Formeln* sind alle Formeln, die höchstens beschränkte Quantoren enthalten,

Σ_1-*Formeln* sind alle Formeln der Form $\exists x_1 \ldots \exists x_m\, \varphi$, wobei φ eine Δ_0-Formel ist,

Π_1-*Formeln* sind alle Formeln der Form $\forall x_1 \ldots \forall x_m\, \varphi$, wobei φ eine Δ_0-Formel ist,

allgemeiner sind (mit $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$)

Σ_{n+1}-*Formeln* alle Formeln der Form $\exists x_1 \ldots \exists x_m\, \varphi$, wobei φ eine Π_n-Formel ist,

Π_{n+1}-*Formeln* alle Formeln der Form $\forall x_1 \ldots \forall x_m\, \varphi$, wobei φ eine Σ_n-Formel ist.

Zur Vereinfachung werden wir für

$\exists x_1 \ldots \exists x_n$ auch $\exists \vec{x}$, für $x_1 \in a \wedge \ldots \wedge x_n \in a$ auch $\vec{x} \in a$ schreiben, und

$\exists \vec{x} \in a$ ist ähnlich zu verstehen (ebenso für den Quantor $\forall$).

Formeln, die logisch äquivalent sind, werden wir i.a. nicht unterscheiden; häufig werden wir jedoch Axiome einer Theorie T zur Umformung benutzen; wir bezeichnen dann mit

$\Sigma_n{}^T$ die Menge aller Formeln, die in T äquivalent zu einer Σ_n-Formel sind, analog

$\Pi_n{}^T$ die Menge aller Formeln, die in T äquivalent zu einer Π_n-Formel sind,

Δ_n-*Formeln* sind alle Formeln, die sowohl zu einer Σ_n-Formel wie zu einer Π_n-Formel logisch äquivalent sind; also $\Delta_n = \Sigma_n \cap \Pi_n$, und entsprechend sei

$\Delta_n{}^T = \Sigma_n{}^T \cap \Pi_n{}^T$.

1.3 *Beispiele*

(i) Die wichtigsten elementaren mengentheoretischen Begriffe (der BOOLEschen Algebra und des Relationen/Funktionen-Kalküls) sind Δ_0-Formeln bzw. $\Delta_0{}^{Paar}$-Formeln, z.B.:

$a = b$, $a \subseteq b$, $a = b \cap c$, $a = b \cup c$, $a = \bigcap b$, $a = \bigcup b$, $a = \{c,d\}$, $a = (c,d)$,

Rel(r), $a = D(f)$, $b = W(f)$, Fkt(f), $f: a \rightarrow b$, $c = a \times b$, Ord(a), Lim(a), Nf(a), Nz(a) ("a ist natürliche Zahl") , u.s.w.

(ii) Wegen $\exists x \in \bigcup a \ldots \leftrightarrow \exists y \in a\, \exists x \in y \ldots$ können $\exists x \in \bigcup a$, $\exists x \in \bigcup \bigcup a$, $\forall x \in \bigcup a$,... als beschränkte Quantoren aufgefaßt werden (aber *nicht:* $\exists x \in P(a)$, $\forall x \in P(a)$!).

(iii) Dagegen sind z.B.

Σ_1-Formeln : $\exists x\,(x = \omega)$, $a \sim b$,

Π_1-Formeln : $a = \mathbf{P}(b)$, Card(a).

1.4 *Definition* (Relativierung)

φ^a entsteht aus φ , indem man in φ jeden Quantor der Form Qx durch $Qx \in a$ ersetzt. (Dabei hat man darauf zu achten, gegebenfalls definierte Begriffe bzw. Abkürzungen durch die ursprünglichen Ausdrücke in der formalen ZF-Sprache zu ersetzen!)
Wir lesen φ^a als "φ relativiert nach a"; φ^a besagt, daß φ in der Struktur $(a,\in)$ gilt, d.h. φ gilt, wenn man sich auf die Elemente von a beschränkt und die gewöhnliche Elementbeziehung beibehält (näheres dazu später unter *Definierbarkeit* und *Wahrheitsbegriff*).Beachte, daß ϕ^a stets eine Δ_0-Formel ist.

1.5 *Lemma*

(i) Ist $\varphi(\vec{a})$ eine Δ_0-Formel , so gilt.

trans(a) $\wedge\ \vec{a} \in a \rightarrow [\ \varphi(\vec{a}) \leftrightarrow \varphi^a(\vec{a})\ ]$ *Absolutheit* von Δ_0-Formeln ,

(ii) Ist $\varphi(\vec{a})$ eine Σ_1-Formel , so gilt.

trans(a) $\wedge\ \vec{a} \in a \rightarrow [\ \varphi^a(\vec{a}) \rightarrow \varphi(\vec{a})]$ *Aufwärts-Absolutheit* von Σ_1-Formeln,

(iii) Ist $\varphi(\vec{a})$ eine Π_1-Formel , so gilt.

trans(a) $\wedge\ \vec{a} \in a \rightarrow [\ \varphi(\vec{a}) \rightarrow \varphi^a(\vec{a})]$ *Abwärts-Absolutheit* von Π_1-Formeln,

(iv) Ist $\varphi(\vec{a})$ eine Δ_1-Formel , so gilt:

trans(a) $\wedge\ \vec{a} \in a \rightarrow [\ \varphi(\vec{a}) \leftrightarrow \varphi^a(\vec{a})\ ]$ *Absolutheit* von Δ_1-Formeln.

1.6 *Bemerkung*

Bei BARWISE [1975] wird die Relativierung einer Formel nach einer Menge a so erklärt, daß beschränkte Quantoren unverändert bleiben; damit wird (i) von 1.5 trivial und (i) - (iii) gelten ohne die Voraussetzung der Transitivität von a . Diese Art der Relativierung hat jedoch den Nachteil, daß logisch äqivalente Formeln nach der Relativierung nicht mehr äquivalent zu sein brauchen!

1.7 *Lemma* (Kontraktion gleichartiger Quantoren)

Unter der Voraussetzung des Paarmengenaxioms können mehrere gleichartige Quantoren zusammengezogen werden (unter Einführung zusätzlicher beschränkter Quantoren):

$\exists x\, \exists y\ \varphi \leftrightarrow \exists z\, \exists x \in z\, \exists y \in z\ \varphi$,

und ähnlich für $\forall$-Quantoren. Somit kann man Σ_1-Formeln auch allein mit *einem* $\exists$-Quantor am Anfang definieren (statt mit einer endlichen Quantorenfolge $\exists x_1 \ldots \exists x_m$). Entsprechendes für Σ_n-Formeln (für n>1) gilt allerdings nur unter zusätzlichen Voraussetzungen.

§2 Die Theorie KP von KRIPKE-PLATEK

Die Theorie **KP** von KRIPKE-PLATEK hat die folgenden Axiome:

Extensionalitätsaxiom:	(Ext)	$\forall x\,(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b$
Paarmengenaxiom:	(Paar)	$\exists y\,\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x = a \vee x = b)$
Summenaxiom:	(Sum)	$\exists y\,\forall z\,(z \in y \leftrightarrow \exists x \in a\; z \in x)$
Δ_0-**Aussonderungsschema**	(Δ_0-AusS)	$\exists y\,\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x,\ldots))$, wobei φ eine beliebige Δ_0-Formel ist,.
Δ_0-**Collection-Schema**	(Δ_0-CollS)	$\forall x \in a\, \exists y\; \varphi(x,y\ldots) \rightarrow \exists z\, \forall x \in a\, \exists y \in z\; \varphi(x,y\ldots))$, wobei φ eine beliebige Δ_0-Formel ist,
Fundierungsschema	(FundS)	$\exists x\, \varphi(x,\ldots) \rightarrow \exists x\,[\varphi(x,\ldots) \wedge \forall y \in x\, \neg \varphi(y,\ldots)]$.

Eine ausführliche Darstellung von **KP** (und **KPU** = **KP** mit Urelementen) findet man bei BARWISE [1975]. (Standard-)Modelle von **KP** heißen *zulässige* Mengen (admissible sets); **KP** nennt man daher auch die *Theorie der zulässigen Mengen*.

Die Axiome von **KP** sind auch Axiome von **ZF**, bzw. in **ZF** beweisbar, wobei das Collection-Schema mit Hilfe des Rangbegriffes -somit insbesondere mittels Potenzmengen- und Fundierungsaxiom - beweisbar ist (oder auch aus einem partiellen Reflexionsprinzip - s. §3 - folgt); also kann man **KP** als *Teiltheorie* von **ZF** auffassen. In der Theorie **Z** (also **ZF** ohne Ersetzungsaxiome, aber mit Aussonderungsaxiomen) kann das Collection-Schema auch mit Hilfe des Auswahlaxioms bewiesen werden.

Das Fundierungsschema von **KP** kann (anders als im Falle von **ZF**) nicht durch das Fundierungsaxiom ersetzt werden (das Unendlichkeitsaxiom ist in **KP** nicht beweisbar).

2.1 *Lemma*

Folgende Mengen existieren in **KP** (und sind eindeutig durch das Extensionalitätsaxiom bestimmt):

$$\emptyset,\ a \cap b,\ a \cup b,\ \bigcap b\ (\text{für } b \neq \emptyset),\ \bigcup b,\ \{c,d\},\ (c,d),\ a \times b\ .$$

Beweis: Interessant (und nicht-trivial) ist nur die Existenz von $a \times b$:

Sei $x \in a$. Dann gilt:

$\forall y \in b\, \exists w\;\; w = (x,y)$, also existiert nach Δ_0-CollS ein u (abhängig von x) mit

$\forall y \in b\, \exists w \in u\; w = (x,y)$, d.h. wir haben

$\forall x \in a\, \exists u\, \forall y \in b\, \exists w \in u\; w = (x,y)$, also existiert wiederum nach Δ_0-CollS ein c mit

$\forall x \in a\, \exists u \in c\, \forall y \in b\, \exists w \in u\; w = (x,y)$.

Setzen wir $d = \bigcup c$, so erhalten wir: $\forall x \in a\, \forall y \in b\, (x,y) \in d$, und somit $a \times b \subseteq d$.

Nun brauchen wir nur noch das Δ_0-Aussonderungsschema anzuwenden. □

Beachte, daß wir zum Beweis der Existenz von $a \times b$ in **ZF** das Potenzmengen- bzw. das Ersetzungsaxiom benötigt haben. Tatsächlich enthält das Δ_0-Collection-Axiom eine schwache

Form des Ersetzungsaxioms.
Um diese nachzuweisen, müssen wir den Begriff der Σ_1-Formel etwas verallgemeinern zum wichtigen Begriff der Σ-Formel:

2.2 *Definition*
Die Klasse der Σ-*Formeln* ist die kleinste Klasse der Formeln , die die Δ_0-Formeln enthält und abgeschlossen ist unter den Operationen $\vee$, $\wedge$, $\forall x \in a$, $\exists x \in a$ sowie unter $\exists x$.

Somit ist jede Σ_1 -Formel auch eine Σ -Formel, aber $\forall x \in a\, \exists y\, \forall u \in y\, \exists v\ \varphi(x,y...)$) , wobei φ eine Δ_0-Formel ist, ist eine Σ -Formel, aber keine Σ_1 -Formel.
Entsprechend definiert man die Π-*Formeln* als die kleinste Menge von Formeln, die die Δ_0-Formeln enthält und abgeschlossen ist unter den Operationen $\vee$, $\wedge$, $\forall x \in a$, $\exists x \in a$ sowie unter $\forall x$.

Schließlich sind Δ -*Formeln* diejenigen Formeln, die sowohl zu einer Σ-Formel wie zu einer Π-Formel äquivalent sind (und entsprechend wieder für Δ^{T}- Formeln. Mengen, die durch eine Δ-Formel definierbar sind, entsprechen den *rekursiven* Mengen, Mengen, die durch eine Σ -Formel definierbar sind, den *rekursiv-aufzählbaren* Mengen. Tatsächlich ist die Theorie der zulässigen Mengen entwickelt worden, um eine geeignete (mengentheoretische) Verallgemeinerung dieser Begriffe von den Zahlen auf größere Bereiche zu erhalten. Von besonderer Bedeutung wird daher sein, daß wir in **KP** einen Rekursionssatz für Σ-Funktionen beweisen können.
Zunächst überzeuge man sich, daß die Aussagen von Lemma 1.5 sich von Σ_1- auf Σ-Formeln verallgemeinern lassen (bzw. von Π_1-Formeln auf Π-Formeln): aber in **KP** braucht man auf diese Unterschiede ohnehin nicht zu achten, denn das Δ_0-Collection-Axiom besagt gerade, daß Σ- und Σ_1-Formeln übereinstimmen:

2.3 *Lemma*
Jede Σ-Formel φ ist in KP äquivalent zu einer Σ_1-Formel der Form $\exists u\ \psi(u,\vec{a})$, wobei ψ eine Δ_0-Formel ist.

Der *Beweis* erfolgt durch einfache Induktion über den logischen Aufbau von φ , wobei man im Falle des beschränkten $\forall$-Quantors das Δ_0-Collection-Axiom benutzt. $\square$

2.4 *Satz* (Σ-Collection)

$$\forall x \in a\, \exists y\ \varphi(x,y...) \quad \rightarrow \quad \exists z\, \forall x \in a\, \exists y \in z\ \varphi(x,y...) \,),$$

wobei φ eine beliebige Σ-Formel ist.

Beweis: Es gelte $\forall x \in a\, \exists y\ \varphi(x,y...)$. Nach 2.3 können wir annehmen, daß φ von der Form $\exists u\ \psi(u,x,y...)$ für eine Δ_0-Formel ψ ist, also gilt $\forall x \in a\, \exists y\, \exists u\ \psi(u,x,y...)$, bzw. mit Quantoren-Kontraktion:

$\forall x \in a\ \exists z\ \exists y \in z\ \exists u \in z\ \psi(u,x,y...)$, und nun mit Δ_0-Collection:

$\exists v\ \forall x \in a\ \exists z \in v\ \exists y \in z\ \exists u \in z\ \psi(u,x,y...)$, insbesondere

$\exists v\ \forall x \in a\ \exists z \in v\ \exists y \in z\ \exists u\ \psi(u,x,y...)$, d.h.

$\exists v\ \forall x \in a\ \exists z \in v\ \exists y \in z\ \varphi(x,y)$, und $w = \bigcup v$ liefert nun die gewünschte Menge. □

2.5 *Lemma* In KP gilt:

(TC) $\exists u\ [\mathrm{trans}(u) \wedge a \subseteq u\ ]$

Beweis durch $\in$-Induktion (also mit Hilfe des Fundierungsschemas): Es gelte

$\forall x \in a\ \exists u\ [\mathrm{trans}(u) \wedge x \subseteq u\ ]$ (Induktionsannahme).

Da mit $\mathrm{trans}(u) \wedge x \subseteq u$ auch $\mathrm{trans}(u \cup \{x\})$, kann man die Induktionsannahme verstärken zu $\forall x \in a\ \exists u\ [\mathrm{trans}(u) \wedge x \in u\ ]$, und mit Δ_0-Collection:

$\forall x \in a\ \exists u \in c[\mathrm{trans}(u) \wedge x \in u\ ]$ für eine Menge c . Setze

$d := \{u \in c \mid \exists x \in a\ (\mathrm{trans}(u) \wedge x \in u)\ \}$. Dann gilt:

$\mathrm{trans}(\bigcup d) \wedge a \subseteq \bigcup d$, was gerade zu zeigen war. □

2.6 Äquivalente Axiomatisierungen von **KP**:

(i) Man kann in **KP** das Axiom (Sum) durch (TC) ersetzen.

(i i) In **KP** kann das Δ_0-Collection-Schema (zusammen mit (Paar) und (Sum)) ersetzt werden durch das

Σ -**PR**: $\varphi(\vec{a}) \rightarrow \exists u\ [\ \mathrm{trans}(u) \wedge \vec{a} \in u \wedge \varphi^u(\vec{a})]$

wobei φ eine beliebige Σ-Formel ist.

Das Σ -**PR** in läßt sich in **KP** durch Induktion über den Formelaufbau von φ beweisen, wobei man im Falle einer Δ_0-Formel die Aussage (TC) benutzt. Umgekehrt folgen (Paar) und (Sum) sowie Δ_0-Collection leicht aus dem Σ -**PR**.

(iii) Das Σ -**PR** wiederum ist übrigens äquivalent zur Σ -Reflexion:

$\varphi(\vec{a}) \leftrightarrow \exists u\ [\ \mathrm{trans}(u) \wedge \vec{a} \in u \wedge \varphi^u(\vec{a})\ ]$, φ Σ -Formel.

(Da mit φ auch $\varphi \wedge \exists x_1 \ldots \exists x_n\ (x_1 = a_1 \wedge \ldots \wedge x_n = a_n)$ eine Σ -Formel ist, kann man in diesem Schema (wie bei BARWISE) den Zusatz $\vec{a} \in u$ weglassen.)

(iv) Es sei

(AC) $\forall x \in a\ x \neq \emptyset \rightarrow \exists f\ (\mathrm{Fkt}(f) \wedge \forall x \in a\ f(x) \in x)$ das übliche Auswahlaxiom.

Ersetzt man in **KP** das Δ_0-Collection-Schema durch das

(Σ_1-AC) $\forall x \in a\ \exists y\ \varphi(x,y...) \rightarrow \exists z\ \forall x \in a\ \exists! y \in z\ (\ (x,y) \in z \wedge \varphi(x,y...)\ )$,

wobei φ eine beliebige Σ_1-Formel ist,

so erhält man gerade die Theorie **KP** + **AC**. (FEFERMANN)

2.7 *Lemma* Es gilt das

$(\Delta\text{-AusS})\quad \exists y\, \forall x\; (x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x,...))$

wobei φ eine beliebige Δ-Formel ist.

Beweis: Es sei $\forall x \in a\; (\varphi(x,\ldots) \leftrightarrow \psi(x,\ldots))$, wobei φ eine Σ-Formel, ψ eine Π-Formel ist. Dann gilt also $\forall x \in a\; (\varphi(x,\ldots) \vee \neg\, \psi(x,...))$, welches zu einer Σ-Formel äquivalent ist. Also existiert nach dem Σ-Reflexionsprinzip eine transitive Menge c mit $a \subseteq c$ und

(*) $\forall x \in a\; (\varphi^c(x,\ldots) \vee \neg\, \psi^c(x,...))$ und nach $(\Delta_0\text{-AusS})$ eine Menge

$b := \{x \in a \mid \varphi^c(x,...)\}$.

Für $x \in b$ gilt $\varphi(x,...)$ (da φ eine Σ-Formel), und ist umgekehrt $x \in a$ und $\psi(x,...)$, so gilt $\psi^c(x,...)$ (da ψ eine Π-Formel ist) und somit nach (*) $\varphi^c(x,...)$, also $x \in b$. Somit erhalten wir: $b = \{x \in a \mid \varphi(x,...)\}$. □

2.8 *Satz*

$(\Sigma\text{-Ersetzung})\quad \forall x \in a\, \exists! y\, \varphi(x,y,...) \rightarrow \exists u\, \forall y\, (y \in u \leftrightarrow \exists x \in a\, \varphi(x,y,...))$, wobei φ eine Σ-Formel ist

bzw. (in der Formulierung bei BARWISE):

$\forall x \in a\, \exists! y\, \varphi(x,y,...) \rightarrow \exists f(\, \mathrm{Fkt}(f) \wedge \forall x \in a\, \varphi(x,f(x),...))$, wobei φ eine Σ-Formel ist.

Beweis mit Σ-Collection. □

2.9 *Definition*

Eine Funktion $F: V \rightarrow V$ heißt Σ-Funktion gdw $F(x) = y \leftrightarrow \varphi(x,y,...)$ für eine Σ-Formel φ . In diesem Fall gilt wegen der Funktionalität von F: $F(x) = y \leftrightarrow \forall z\, (\varphi(x,z,...) \rightarrow z = y)$, also ist die Relation $F(x) = y$ (d.h. der Graph von F) Δ-definierbar!

Sieht man sich den Beweis des Rekursionssatzes (in **ZF**) genau an, so erkennt man, daß er sich wie folgt auf **KP** übertragen läßt:

2.10 *Satz* (Σ-Rekursion)

F sei eine $n+2$-stellige Σ-Funktion. Dann gibt es eine $n+1$-stellige Σ-Funktion G mit

$G(x, \vec{a}) = F(x, \vec{a}, \{G(y, \vec{a}) \mid y \in x\})$ bzw.

$G(x, \vec{a}) = F(x, \vec{a}, \{G(y, \vec{a}) \mid y \in TC(x)\})$,

wobei $TC(x)$ die transitive Hülle von x ist (welche existiert und Δ-definierbar ist). □

Insbesondere lassen sich die Rang-Funktion sowie die ordinalen Operationen der Addition, Multiplikation und Potenz als Δ-definierbare Funktionen einführen.

Die Σ-Funktion besitzen weitere Abgeschlossenheitseigenschaften (wie die rekursiven Funktionen der Zahlentheorie): Komposition von Σ-Funktionen ist eine Σ-Funktion, und mittels Fallunterscheidung gelangt man von Σ-Funktionen wieder zu Σ-Funktionen (zur genaueren Formulierung s. BARWISE [1975], p. 23).

2.11 *Bemerkungen*

(i) Ist F eine Σ-Funktion, so gilt:

$\forall x \in F(a)\, \phi \leftrightarrow \forall y\, (y = F(a) \rightarrow \forall x \in y\, \phi) \leftrightarrow \exists y\, (y = F(a) \wedge \forall x \in y\, \phi)$ und ähnlich für $\exists x \in F(a)\, \phi$; die Quantoren $\forall x \in F(a)$ und $\exists x \in F(a)$ können also in diesem Zusammenhang wie " Δ-Quantoren" behandelt werden,
d.h. ist ϕ eine Σ-Formel bzw. Π-Formel, so auch

$\forall x \in F(a)\, \phi$, $\exists x \in F(a)\, \phi$. (Z.B. im Falle $F(a) = TC(a)$.)

(i i) a endlich : $\leftrightarrow \exists f \exists n\, (Nz(n) \wedge f: n \leftrightarrow a)$,

a abzählbar : $\leftrightarrow \exists f\, (f$ injektive Funktion $\wedge\, dom(f) = a \wedge \forall x \in a\; Nz(f(x)))$

sind in **KP** durch nur durch Σ-Formeln definierbar (jedoch ist " a ist endliche Menge von Ordinalzahlen" in **KP** durch eine Δ-Formel definierbar). Der *Endlichkeitsbegriff* läßt sich bereits in **KP + Un** (**Un** = Unendlichkeitsaxiom) durch eine Δ-Formel definieren; der Begriff der *Abzählbarkeit* ist aber selbst in ZF nur durch eine Σ-Formel definierbar!

Die Ergebnisse von **ZF**, die das **Aussonderungsaxiom** nur für Δ-Formeln und das **Ersetzungsaxiom** nur für Σ-Funktionen benutzen und die *nicht* das **Unendlichkeits-** und das **Potenzmengenaxiom** anwenden, lassen sich also in **KP** bereits beweisen; insofern kann man die Theorie **KP** als eine "effektive" Version von **ZF** auffassen. Für manche Resultate muß man jedoch weitere Axiome hinzufügen, z.B.:

2.12 In **KP + Un** läßt sich eine Σ-Funktion F durch Rekursion über natürliche Zahlen definieren, so daß mit F(a,n) die Menge der n-elementigen Teilmengen von a ist:

$F(a,0) = \{\emptyset\}$, $F(a,n+1) = \{x \cup \{y\} \mid x \in F(a,n) \wedge y \in a \wedge y \notin x\}$, und es sei

$P_{<\omega}(a) := \{x \subseteq a \mid x \text{ endlich}\} = \bigcup_{n\in \omega} F(a,n) = \bigcup \{F(a,n) | n \in \omega\}$.

Wir erhalten Mengen aufgrund der Axiome **Un**, **Sum** und Σ–**ErsS**!

Insbesondere gilt in **KP + Un** : a endlich $\leftrightarrow a \in P_{\omega}(a)$

und ist somit (wie in 2.11 (i)) Δ-definierbar; die Quantoren

$\forall x \in P_{<\omega}(a)$, $\exists x \in P_{<\omega}(a)$ sind wie " Δ-Quantoren" zu behandeln.

2.13 In **KP +** Σ_1**-AusS** läßt sich beweisen, daß jede Wohlordnung r isomorph zur $\in$-Beziehung auf (genau einer) Ordinalzahl ist; in dieser Theorie sind die Eigenschaften

"r ist *fundiert*" sowie "r ist *Wohlordnung*" durch Δ-Formeln definierbar.

2.14 Die obigen Ergebnisse können auf Sprachen erweitert werden, die z.B. weitere Prädikatzeichen enthalten. Besonders wichtig ist der Fall, daß die mengentheoretische Sprache um ein Funktionszeichen P (für die Potenzmengenoperation) ergänzt wird. Die Def. 1.2 und 2.2 beziehen sich dann auf $\Sigma_n(P)$- , $\Pi_n(P)$- bzw. $\Delta_n(P)$-Formeln; die Theorie **KP**, bezogen auf die so erweiterte Sprache (was sich in den Axiomen*schemata* auswirkt) und ergänzt um das **Potenzmengenaxiom**, heißt dann die Theorie der P-zulässigen Mengen, **KP(P)**. Eine besonders wichtige Funktion, die in dieser Theorie $\Delta(P)$-definierbar ist, ist die VON

NEUMANNsche Funktion $(V_\alpha \mid \alpha \in On)$.

§3 Partielle Reflexionsprinzipien

3.1 Als *Basistheorie* wählen wir die Theorie $\mathbf{S_0}$ mit den folgenden *Axiomen*:

Extensionalitätsaxiom: (Ext) $\forall x\,(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b$

Δ_0-**Aussonderungsschema** (Δ_0-AusS) $\exists y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x,...))$,
wobei φ eine beliebige Δ_0-Formel ist,.

Fundierungsaxiom (Fund) $a \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in a\ x \cap a = \emptyset$.

Hinzunehmen werden wir die folgenden **partiellen Reflexionsprinzipien :**

$\mathbf{PR}_{trans}$: $\varphi(\vec{a}) \rightarrow \exists\, u\, [\, trans(u) \wedge \vec{a} \in u \wedge \varphi^u(\vec{a})]$ bzw.

$\mathbf{PR}_{strans}$: $\varphi(\vec{a}) \rightarrow \exists\, u\, [\, strans(u) \wedge \vec{a} \in u \wedge \varphi^u(\vec{a})]$.

Es sei **T1** die Theorie $\mathbf{S_0}$ mit $\mathbf{PR}_{trans}$, **T2** die Theorie $\mathbf{S_0}$ mit $\mathbf{PR}_{strans}$.

3.2 *Satz*
In **T1** (und a fortiori in **T2**) sind die folgenden Axiome beweisbar:
Null, **Paar**, **Sum**, **Un**, **FundS**,
in **T2** gilt zusätzlich das Potenzmengenaxiom **Pot**.

Beweis: Das *Nullmengenaxiom* folgt allein aus dem Δ_0-AusS .

Paarmengenaxiom: wähle die Formel $\varphi(a,b) :\leftrightarrow \exists\, x\, (x = a) \wedge \exists\, x\, (x = b)$; dann ergibt sich die Existenz einer Menge u mit $a \in u$ und $b \in u$, also $\{a,b\} \subseteq u$ und somit existiert $\{a,b\}$ nach dem Δ_0-AusS .

Summenaxiom: wähle die Formel $a = a$; es ergibt sich die Existenz einer transitiven Menge u mit $a \in u$, es ist dann $\bigcup a \subseteq u$, also existiert $\bigcup a$ wiederum nach dem Δ_0-AusS .

Unendlichkeitsaxiom: Wähle die (nach obigen Ergebnissen beweisbare Formel)
$\exists x\, (x = \emptyset) \wedge \forall x\, \exists y\, (x \cup \{x\} = y)$; Anwendung des Reflexionsprinzips ergibt die Existenz einer transitiven Menge u mit

$(\exists x\, (x = \emptyset) \wedge \forall x\, \exists y\, (x \cup \{x\} = y))^u$, und da $x \cup \{x\} = y$ eine Δ_0-Formel ist, gilt

$\emptyset \in u \wedge \forall x \in u\, \exists y \in u\, (x \cup \{x\} = y)$, wie im Unendlichkeitsaxiom gefordert.

Fundierungschema: Annahme, es gelte $\varphi(a) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \exists y \in x\, \varphi(y))$. Dann liefert das Reflexionsprinzip eine transitive Menge u mit (den Parametern von φ als Elementen und) $a \in u \wedge (\forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \exists y \in x\, \varphi(y))^u$, also $a \in u \wedge (\forall x \in u\, (\varphi^u(x) \rightarrow \exists y \in x\, \varphi^u(y))$. Setze $c := \{x \in u \mid \varphi^u(x)\}$. Dieses ist eine Menge nach dem Δ_0-AusS und ergibt einen Widerspruch zum Fundierungsaxiom.

Potenzmengenaxiom: Gegeben eine Menge a, gibt es nach $\mathbf{PR}_{strans}$ eine Menge u mit $a \in u \wedge strans(u)$, insbesondere $P(a) \subseteq u$. P(a) ist dann wiederum eine Menge nach dem Δ_0-AusS . □

Die Theorie **T1** ist somit eine Erweiterung von **KP ,** und zwar eine *echte* Erweiterung, da das Unendlichkeitsaxiom in **KP** nicht gilt.

§4 Vollständige Reflexionsprinzipien

4.1 Um auch das FRAENKELsche Ersetzungsaxiom zu erhalten, verstärken wir die Schemata der partiellen Reflexion zu den entsprechenden Schemata der **vollständigen Reflexion** (*complete reflection*):

$\mathbf{CR}_{trans}$: $\exists u\ [\ trans(u)\ \wedge a \in u\ \wedge \forall \vec{x} \in u\ (\ \varphi(\vec{x})\ \leftrightarrow\ \varphi^u(\vec{x}))]$ bzw.

$\mathbf{CR}_{strans}$: $\exists u\ [\ strans(u)\ \wedge a \in u\ \wedge \forall \vec{x} \in u\ (\ \varphi(\vec{x})\ \leftrightarrow\ \varphi^u(\vec{x}))]$.

Es sei **T3** die Theorie $\mathbf{S}_0$ mit $\mathbf{CR}_{trans}$, **T4** die Theorie $\mathbf{S}_0$ mit $\mathbf{CR}_{strans}$.
Wir schreiben $T \vdash \varphi$ für " φ ist *beweisbar* in der Theorie T".

4.2 *Satz*

T3 $\vdash$ **Null**, **Paar**, **Sum**, **Un**, **FundS**,

T4 $\vdash$ **Null**, **Paar**, **Sum**, **Un**, **FundS**, **Pot**.

Beweis: Ein technisches Problem liegt darin, das Paarmengenaxiom abzuleiten - wir werden darauf in 4.6 zurückkommen. Mit Hilfe dieses Axioms kann man aus den vollständigen die entsprechenden partiellen Reflexionsprinzipien ableiten und sich auf Satz 3.2 berufen. Alternativ läßt sich nach der Methode von 3.2 direkt auch das Summenaxiom (bzw. das Potenzmengenaxiom) beweisen sowie die Aussage

$\forall x\ \exists y\ (\ \{x\} = y\ )$ und damit das Unendlichkeitsaxiom in der schwächeren Form

$\exists u\ (\emptyset \in u\ \wedge \forall x \in u\ \exists y \in u\ \ \{x\} = y\ )$. □

4.3 *Satz*

In **T3** läßt sich $\mathbf{CR}_{trans}$ (und analog $\mathbf{CR}_{strans}$) verstärken zur simultanen Anwendung auf endlich viele Formeln:

$$\exists u\ [\ trans(u)\ \wedge a \in u\ \wedge \forall \vec{x} \in u\ \ \bigwedge_{i<m} (\ \varphi_i(\vec{x})\ \leftrightarrow\ \varphi_i^u(\vec{x}))]\quad .$$

Beweis: Wir benutzen die *Ziffern* $0 = \emptyset$, $0^{(n+1)} = \{0^{(n)}\}$ und kodieren die Formeln ϕ_i durch die Formel

$$\varphi(y,\vec{x}) :\leftrightarrow\ \bigvee_{i<m} (y = 0^{(i)}\ \wedge\ \varphi_i(\vec{x})\ ).$$

Anwendung des Reflexionsprinzips auf diese Formel und die Menge $\{a,0^{(m)}\}$ anstelle von a (hier benötigen wir das Paarmengenaxiom!) ergibt dann die Behauptung. □

4.4 *Korollar*

Die Theorien **T1** - **T4** sind nicht endlich-axiomatisierbar.

Beweis: Wäre eine der Theorien durch endlich viele Formeln zu axiomatisieren, so durch eine einzelne (als Konjunktion der endlich-vielen), hätte also nach dem jeweiligen Reflexionsprinzip ein (transitives) Modell im Widerspruch zum 2. GÖDELschen

Unvollständigkeitssatz. □

4.5 *Satz*

T3 $\vdash$ **Ersetzungsaxiom**, also **T3** $\vdash$ **ZF**- ohne **Potenzmengenaxiom** ,und
T4 $\vdash$ **ZF** .

Beweis: Es gelte

$\forall x \forall y \forall z\ (\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \to y = z)$ (wobei φ noch Parameter $\vec{a}$ enthalten kann), und es sei eine Menge a gegeben. Dann existiert nach 3.3 eine transitive Menge u mit $\vec{a} \in u$, $a \in u$ und

$\forall x,y \in u\ (\ \varphi(x,y) \leftrightarrow \varphi^u(x,z))$ sowie
$\forall x \in u\ (\exists\ y\ \varphi(x,y) \leftrightarrow \exists y \in u\ \ \varphi^u(x,y))$, insbesondere
$\forall x \in u\ (\exists\ y\ \varphi(x,y) \leftrightarrow \exists y \in u\ \ \varphi(x,y))$, also ist nach dem Δ_0-AusS
$\{y|\ \exists x \in a\ \varphi(x,y)\ \} = \{y|\ \exists x \in a\ \varphi^u(x,y)\ \}$ eine Menge, die gleich dem Bild von a unter der durch φ definierten Funktion ist. □

4.6 *Bemerkungen*

(1) Der Beweis des Paarmengenaxioms kann wie folgt gegeben werden: Zunächst beweise man 4.3 - allerdings ohne den Zusatz $a \in u$, sodann das Ersetzungsaxiom nach 4.5 (allerdings etwas mühsamer - man braucht 4.3 für 4 Formeln, um die Parameter geeignet zu berücksichtigen, s.
Levy, A.: Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory, Pac. J. Math. 10 (1960), 223-228). Man benutzt dann die Tatsache, daß sich die Existenz einer 2-elementigen Menge (nämlich mit 0 und {0} als Elementen) beweisen läßt und jedes Paar {a,b} Bild dieser speziellen Menge ist, also auch eine Menge nach dem Ersetzungsaxiom.

(2) Besonders einfach läßt sich mit den vollständigen Reflexionsprinzipien das Hüllenschema von MONTAGUE sowie die Existenz von Fixpunkten von Normalfunktionen beweisen, wo der übliche ZF-Beweis numerische Iteration benötigt.

Eine Kombination des partiellen mit dem vollständigen Reflexionsprinzip ist für Anwendungen noch besser geeignet:

4.7 Wir gehen jetzt wieder zur erweiterten ZF-Sprache mit Klassenvariablen über, wobei diese eigentlich im strengen Sinne keine formalen Variablen (wie die Mengenvariable) sind, sondern *Metavariable* für Klassen*terme* , d.h. A, B, . . . stehen wie im Teil A beschrieben für Ausdrücke der Form $\{x|\varphi(x,...)\}$, die mittels des CHURCHschen Prinzips (prinzipiell) wieder eliminierbar sind. Es seien

PRC$_{trans}$: $\varphi(\vec{a},A_1, . . ,A_m) \to \exists\ u\ [trans(u) \wedge \vec{a} \in u \wedge \varphi^u(\vec{a},A_1 \cap u, . . ,A_m \cap u)]$ bzw.
PRC$_{strans}$: $\varphi(\vec{a},A_1, . . ,A_m) \to \exists\ u\ [trans(u) \wedge \vec{a} \in u \wedge \varphi^u(\vec{a},A_1 \cap u, . . ,A_m \cap u)]$

die partiellen Reflexionsprinzipien für diese Sprache, wobei $\varphi(\vec{a},A_1, . . ,A_m)$ eine Formel ist, die außer $\vec{a}$ keine weiteren freien Mengenvariablen und außer $A_1,\ldots,A_m$ keine weiteren Klassenterme enthalte (tatsächlich werden wir mit einer Klasse A_1 auskommen).

4.8 *Satz*

$\mathbf{S_0} + \mathbf{PRC}_{trans} \vdash \mathbf{CR}_{trans}$ (ebenso für strans statt trans).

Beweis:
Das Paarmengenaxiom erhält man wie in 3.2. Sei nun $\varphi(\vec{a})$ eine ZF-Formel im engeren Sinne (also ohne Klassenterme wie im Prinzip $\mathbf{CR}_{trans}$), setze

$A := \{(\vec{a}) \mid \varphi(\vec{a})\}$ und wende $\mathbf{PRC}_{trans}$ an auf die Formel

$\exists x\ (x = a) \wedge \forall x,y\ \exists z\ z = (x,y) \wedge \forall \vec{x}\ (\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow (\vec{x}) \in A)$.

Man erhält dann die Existenz einer transitiven Menge u mit $a \in u$ und

$\forall x,y \in u\ (x,y) \in u$ und

$\forall \vec{x} \in u(\varphi^u(\vec{x}) \leftrightarrow (\vec{x}) \in A \cap u)$, d.h.

$\forall \vec{x} \in u(\varphi^u(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x}))$. □

Aus $\mathbf{PRC}_{trans}$ erhält man ebenso leicht direkt das Ersetzungsaxiom:

4.9 *Satz*

$\mathbf{S_0} + \mathbf{PRC}_{trans} \vdash$ Ersetzungsaxiom,

$\mathbf{S_0} + \mathbf{PRC}_{strans} \vdash \mathbf{ZF}$

(tatsächlich ist die letzte Theorie wie **T4** axiomatisch äquivalent mit **ZF**).

Beweis: (Tatsächlich werden wir das MONTAGUEsche Hüllenschema beweisen!)
Es sei $Fkt(F)$ und $a = D(F)$. Dann gilt also:

$\forall x \in a\ \exists y\ \ y = F(x)$, und die Anwendung des Reflexionsprinzips auf diese Formel liefert die Existenz einer Menge b mit

$a \in b \wedge \forall x \in a\ \exists y \in b\ (y = F(x))$, d.h. der Wertebereich ist eine Menge. (Dazu benötigt man allerdings noch das volle Aussonderungsaxiom, das aus 4.8 folgt oder auch direkt nach der Methode von 4.8 leicht zu beweisen ist.) □

§5 Theorien 2. Stufe

5.1 Wir erweitern die ZF-Sprache zur mengentheoretischen Sprache 2. Stufe durch die Hinzunahme freier und gebundener *Klassenvariabler*, bezeichnet mit

A, B, C, . . . bzw. X, Y, Z, . . . (gegebenenfalls mit Indizes).

Atomare Formeln sind (wie im Falle der erweiterten ZF-Sprache) die Ausdrücke

$a = b$, $a \in b$ und $a \in A$;

die übrigen Fälle (wie $A = B$, $B \in A$ usw) kann man durch geeignete Definition auf die übrigen zurückführen (vgl. I.2.6 p.10). Zu den bekannten logischen Operationen treten Quantifikationen über Klassen hinzu:

$\forall X \ldots$ bzw. $\exists X \ldots$

Formeln 2.Stufe mit gebundenen Klassenvariablen nennt man auch *imprädikativ*, Formeln mit höchstens freien Klassenvariablen (aber möglicherweise gebundenen Mengenvariablen) heißen *prädikativ* oder Π^0_1-Formeln.

5.2 Die Mengenlehre **B** von BERNAYS [1958] beruht auf der prädikativen Sprache (mit Klassentermen) und den (zu den folgenden äquivalenten) *Axiomen*:

Ext, Paar, Sum, Pot, Un, Fund (wie für ZF)

sowie dem Aussonderungs- und Ersetzungsaxiom 2. Stufe:

Aus* $\exists y\, \forall x\ (x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge x \in A)$

Ers*: $Fkt(F) \rightarrow \exists y\ (y = F[a])$.

sowie einer (logischen) Regel, welche besagt, daß jede Aussage, die für eine Klassenvariable A gilt, auch für jeden Klassenterm anstelle von A gilt.

Die im Teil I aufgebaute und benutzte Fassung der ZF-Mengenlehre (in der erweiterten Sprache) ist also fast gleichwertig mit der BERNAYSschen Mengenlehre - der Unterschied liegt nur in der Interpretation der Klassen: in **ZF** bezeichnen diese nur (definierbare) Klassen*terme*, in **B** sind es Variablen, die zwar auch, aber möglicherweise nicht nur Klassenterme bezeichnen.

Nach der Methode von §4 erhalten wir:

5.3 Satz

B1 sei die Theorie mit den Axiomen **Ext, Aus*, Fund** und dem folgenden partiellen Reflexionsprinzip:

PR*$_{trans}$: $\phi(\vec{a},A) \rightarrow \exists\, u\ [trans(u) \wedge \vec{a} \in u \wedge \phi^u(\vec{a}, A \cap u)]$, $\phi(\vec{a},A)$ eine prädikative Formel.

Dann sind in **B1** die Axiome von **B** mit Ausnahme des Potenzmengenaxioms beweisbar; in **B2** mit dem entsprechenden **PR***$_{strans}$ sind alle Axiome von **B** beweisbar. (Tatsächlich ist **B2** mit **B** äquivalent.)

Später werden wir zeigen, daß das Reflexionsprinzip **PR***$_{trans}$ wesentlich stärker ist (und die Existenz unerreichbarer Zahlen nach sich zieht), wenn man in ihm auch imprädikative

Formeln zuläßt.

5.4 Fügt man zu den Axiomen der BERNAYSschen Mengenlehre **B** das Komprehensionsschema

P-Komp : $\exists Y \, \forall x \; (x \in Y \leftrightarrow \Phi(x,....))$, ϕ eine prädikative Formel, bzw.
Komp : $\exists Y \, \forall x \; (x \in Y \leftrightarrow \Phi(x,....))$, ϕ eine beliebige Formel 2. Stufe,

hinzu, so erhält man die Theorie **NBG** (VON NEUMANN-BERNAYS-GÖDEL) bzw. die imprädikative theorie **QM** (QUINE-MORSE bzw. MORSE-KELLEY).
Dieses sind echte Erweiterungen von **ZF**, allerdings gilt.

- **NBG** ist konservative Erweiterung von **ZF** (d.h. in **NBG** gelten dieselben Sätze, soweit sie in der engeren ZF-Sprache, also nur mit Mengenvariablen, ausdrückbar sind,
  NBG ist (im Gegensatz zu **ZF**) endlich-axiomatisierbar,
- **QM** ist *keine* konservative Erweiterung von **ZF** , d.h. in dieser Theorie gelten mengentheoretische Sätze, die in **ZF** nicht beweisbar sind, aber die Theorie ist *nicht* endlich-axiomatisierbar.

Während also die Widerspruchsfreiheit von **NBG** mit derjenigen von **ZF** gleichwertig ist, ist die Annahme der Widerspruchsfreiheit von **QM** echt stärker als diejenige von **ZF** .

- Für Modelle von **QM** bzw. **NBG** (in geeigneter Formalisierung) der Form V_α muß α stark unerreichbar sein; die Existenz solcher Zahlen ist in diesen Theorien also weiterhin nicht beweisbar (Widerspruchsfreiheit vorausgesetzt).

5.5 Wir betrachten nun eine (wesentliche) Verstärkung von **PR***$_{trans}$:

PR Π^1_1 : $\phi(\vec{a},A) \rightarrow \exists\, u \; [trans(u) \wedge \vec{a} \in u \wedge \phi^u(\vec{a}, A \cap u)]$, $\phi(\vec{a},A)$ eine Π^1_1 -Formel ist, d.h. eine Formel der Form

$\phi(\vec{a},A) = \forall X \; \psi(X, \vec{a}, A)$, wobei $\psi(X, \vec{a}, A)$ eine prädikative (Π^0_1 -) Formel ist.

Die *Relativierung* dieser Formel nach u wird so erklärt, daß $\forall X$ durch $\forall X \subseteq u$ ersetzt wird, während gebundene Mengenvariable wie vorher auf Elemente von u beschränkt werden.

B^1 sei die Theorie mit den Axiomen **Ext + Aus + Fund** + **PR** Π^1_1 .

In dieser Theorie lassen sich beweisen.

- alle Axiome von **B** (einschließlich des Potenzmengenaxioms!).
- Man kann also im Reflexionsprinzip als Π^1_1 -Formel die Konjunktion aller Axiome von **B** (mit universellem Abschluß über alle Klassen - daher Π^1_1 -Formel) einsetzen und erhält als Verstärkung des Reflexionsprinzips die Existenz einer Menge u von der Form eines V_α , wobei dieses ein Modell von B ist, also muß α stark unerreichbar sein. Die Existenz von "sehr vielen" unerreichbaren Zahlen kann man wiederum in das Reflexionsprinzip einsetzen und erhält die Existenz von "sehr vielen" unerreichbaren Zahlen, die ihrerseits jeweils "sehr vielen" unerreichbaren Zahlen unterhalb besitzen, u.s.w.

§6 Hierarchiesätze in ZF

Unser Ziel wird es sein, in **ZF** das vollständige Reflexionsprinzip in der Form

$$\exists\,\alpha\,[\ a \in V_\alpha \wedge \forall\,\vec{x} \in V_\alpha\ (\ \phi(\vec{x}) \leftrightarrow \phi^{V_\alpha}(\vec{x})\ )\ ]$$

zu beweisen. Tatsächlich gilt das Ergebnis allgemeiner für viele Hierarchien:

6.1 *Definition*

$(\ M_\alpha |\ \alpha \in On)$ sei eine *kumulative und stetige Hierarchie* von Mengen, d.h.

(H1) $\forall\alpha\ Mg(\ M_\alpha\ )$

(H2) $\forall\alpha, \beta\ (\alpha < \beta \ \rightarrow\ M_\alpha \subseteq M_\beta\ )$ *kumulativ*

(H3) $\forall\lambda\ \ (Lim(\lambda)\ \ \rightarrow\ M_\lambda\ =\ \cup_{\xi<\lambda} M_\xi\ )$ *stetig .*

Setze $M := \cup_{\alpha\in On} M_\alpha$.

Beispiele: Der wichtigste Fall ist natürlich $M_\alpha = V_\alpha$ mit $M = V$ in diesem Fall. Es gibt aber auch andere interessante Beispiele im Zusammenhang mit *inneren ZF-Modellen*. Beachte, daß die Hierarchien auch (stückweise) konstant sein können.

6.2 *Satz*

$\phi(\vec{a})$ sei eine ZF-Formel (im engeren Sinne) mit den angebenen freien Variablen. Dann existiert eine Normalfunktion F mit

$$F(\alpha) = \alpha \rightarrow \forall\,\vec{x} \in M_\alpha\ (\ \phi^M(\vec{x})\ \leftrightarrow\ \phi^{M_\alpha}(\vec{x})\ )\ .$$

(Dabei ist im Falle einer Klasse M die Relativierung ϕ^M wie im Falle von Mengen definiert: ersetze in ϕ alle Quantoren der Form Qx durch $Qx \in M$ - gegebenenfalls sind dabei gebundene Variable geeignet umzubenennen.)

6.3 *Korollar* (Satz von SCOTT-SCARPELLINI)

(i) $\forall\beta\ \exists\alpha[\ \beta<\alpha\ \wedge\ \forall\,\vec{x} \in M_\alpha\ (\ \phi^M(\vec{x})\ \leftrightarrow\ \phi^{M_\alpha}(\vec{x})\ )]$ und speziell für $M_\alpha = V_\alpha$:

(ii) $\forall\beta\ \exists\alpha[\ \beta<\alpha\ \wedge\ \forall\,\vec{x} \in V_\alpha\ (\ \phi(\vec{x})\ \leftrightarrow\ \phi^{V_\alpha}(\vec{x})\ )]$,

insbesondere ist das vollständige Reflexionsprinzip $\mathbf{CR}_{strans}$ in **ZF** beweisbar.

Der Beweis wird durch Induktion über den Formelaufbau geführt, wobei der wichtigste Fall der Fall einer Existenzformel ist:

6.4 *Lemma*

$$\forall\alpha\ \exists\beta[\ \alpha<\beta\ \wedge\ \forall\,\vec{x} \in M_\alpha\ (\ \exists x \in M\ \psi(x,\vec{x})\ \leftrightarrow\ \exists x \in M_\beta\ \psi(x,\vec{x})\ )]$$

Beweis: Es sei α gegeben. Definiere eine Funktion $f\colon M_\alpha{}^n \rightarrow On$ durch

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots ,a_n) &= \mu\eta \geq \alpha\ \exists x \in M_\eta\ \psi(x,a_1, \dots ,a_n)\ , \text{ falls } \exists x \in M\ \psi(x,a_1, \dots ,a_n)\ ,\\ &= \alpha \quad \text{sonst.} \end{aligned}$$

$\beta = (\bigcup W(f)\ )+1$ hat die gewünschte Eigenschaft (nach (H1) und (H2)). □

6.5 *Lemma* Zu jeder Formel der Form $\exists x\, \psi(x, \vec{a})$ gibt es eine Normalfunktion G mit

$$\beta = G(\alpha) \rightarrow \forall \vec{x} \in M_\alpha\ (\exists x \in M\ \psi(x,\vec{x}) \leftrightarrow \exists x \in M_\beta\ \psi(x,\vec{x})\ )$$

Beweis: Definiere mit Hilfe von 6.4 eine Funktion G durch transfinite Rekursion wie folgt:

$$G(0) = \mu\eta\ [\ \forall \vec{x} \in M_0\ (\exists x \in M\ \psi(x,\vec{x}) \leftrightarrow \exists x \in M_\eta\ \psi(x,\vec{x})\ )\ ]\ ,$$
$$G(\alpha+1) = \mu\eta\ [G(\alpha) < \eta\ \wedge \forall \vec{x} \in M_{\alpha+1}\ (\exists x \in M\ \psi(x,\vec{x}) \leftrightarrow \exists x \in M_\eta\ \psi(x,\vec{x})\ )\ ]\ ,$$
$$G(\lambda) = \bigcup_{\xi<\lambda} G(\xi) \quad \text{für Limeszahlen } \lambda\ . \ \square$$

Wir beweisen nun 6.2 durch Induktion über den logischen Aufbau der Formel ϕ :
1. Fall: ϕ atomar: wähle für F einfach die identische Funktion auf On.
2. Fall: $\phi = \neg\psi$: man kann für ϕ dieselbe Funktion wie für ψ wählen.
3. Fall: $\phi = \psi \circ \chi$ für eine aussagenlogische Operation o: Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Normalfunktionen G bzw. H , welche ψ bzw. χ "reflektieren" Für ϕ kann man dann die Kompositionsfunktion $F = G\ H$ wählen, denn wegen $G(H(\alpha)) \geq H(\alpha) \geq \alpha$ gilt:

$$F(\alpha) = \alpha \rightarrow \quad G(\alpha) = H(\alpha) = \alpha\ .$$

4. Fall: $\phi = \exists x\, \psi$: Nach Induktionsvoraussetzung gibt es für eine Normalfunktion H , welche ψ reflektiert; wähle ferner G nach Lemma 6.5 und bilde wiederum $F = G\ H$. Dieses ist wieder eine Normalfunktion, deren Fixpunkte zugleich Fixpunkte von G und H sind (wie oben), also für ϕ die gewünschte Funktion liefert. □

6.6 *Bemerkungen*

(1) Aus 6.2 folgt, daß in **ZF** auch die Axiome von **T4** beweisbar, somit sind beide Theorien äquivalent und nicht endlich-axiomatisierbar.

(2) Die Normalfunktion F in 6.2 hängt - wie der Beweis zeigt - von der jeweiligen Formel ϕ ab; da die Komposition endlich-vieler Normalfunktionen wiederum eine Normalfunktion ist, deren Fixpunkte auch Fixpunkte der einzelnen Funktionen sind, läßt sich 6.2 (und damit auch 6.3) leicht für den Fall endlich-vieler Formeln verstärken (vgl. Satz 4.3). In der imprädikativen Theorie **QM** (aber *nicht* in **ZF** oder **NBG**) kann man das Ergebnis auf die abzählbar-vielen Formeln von **ZF** verstärken und erhält damit die Existenz *einer* Normalfunktion F , so daß für *alle* Formeln ϕ gilt:

$$F(\alpha) = \alpha \rightarrow \forall \vec{x} \in V_\alpha\ (\ \phi(\vec{x}) \leftrightarrow \phi^{V_\alpha}(\vec{x})\ )\ ,$$

woraus die Existenz sehr vieler ZF-Modelle der Form V_α folgt (wobei α aber nicht unerreichbar zu sein braucht).

(3) Die Ergebnisse 6.2 und 6.3 lassen sich auch auf Klassenterme übertragen, wenn man definiert: $\{x|\ \phi(x,\ldots)\}^M = \{x \in M|\ \phi^M(x,\ldots)\}$ (und damit läßt sich auch das Prinzip **PRC** in **ZF** beweisen):

6.7 *Satz* Zu Klassentermen $A_1, \ldots A_n$ (mit $\vec{x}$ als Parametern) existiert eine Normalfunktion F mit $F(\alpha) = \alpha \rightarrow \forall \vec{x} \in V_\alpha\ (\ A_i \cap V_\alpha = A_i^{V_\alpha}$ für $i = 1,..,n)$. □